Le tournoi de tennis

Le pourquoi du comment

Si vous me demandiez qu'est-ce que l'Histoire, je répondrais quelque chose de naïf comme, l'histoire, c'est l'étude du passé. Sans doute est-ce faux, douteux ou maladroit, qu'en sais-je ? Certes, j'aime bien l'Histoire, mais je ne suis pas historien. D'ailleurs, l'archéologie, que j'aime aussi, la géologie, que je connais mal, étudient le passé et ainsi, il est clair que ma définition est, sinon fausse, du moins insuffisante.

Par contre, je suis bien placé pour répondre à la question : Que sont les mathématiques ? Après y avoir longuement réfléchi (des années en fait), j'ai une réponse qui me parait correcte. Les mathématiques, c'est la recherche de l'évidence. Le problème avec cette réponse, c'est qu'elle est claire pour moi, sans doute aussi pour n'importe quel mathématicien, même si tous, loin de la, ne seraient pas forcément d'accord, par contre, pour le lecteur, a priori novice, cela ne veut rien dire. Le choix méticuleux de chaque mot n'a pas le même sens pour moi que pour lui.

Insistons tout d'abord sur le fait qu'il y a deux mots. Le mathématicien est toujours à la recherche de quelque chose. Un problème résolu est un non-sens pour lui. La clef pour lui est l'évidence, une vérité incontestable, universelle, au moins au sein de la race humaine, voire au-delà si on est platonicien.

Si on m'avait posé la question, il y a vingt ans, j'aurais plutôt dit que les mathématiques, c'est la recherche de la preuve, m'opposant ainsi à l'idée fausse que les mathématiques sont à la recherche de la vérité. D'ailleurs, en anglais ou en espagnol, évidence signifie preuve. Mais il y a dans le mot preuve une connotation juridique qui me déplaît de plus en plus à force d'entendre des élèves demander "est-ce qu'on a le droit de ...", ce qui est rarement la question pertinente.

Bref quoi, expliquer ma réponse, nécessiterait des développements sans fin, et franchement, cela serait vraiment ennuyeux. Aussi vais-je vous conter une allégorie. L'histoire du tournoi de tennis n'est pas de moi. Je ne sais pas d'où elle vient mais elle est bien connue chez les professeurs de mathématiques. j'espère qu'elle va vous faire ressentir au fond de vos tripes, ce que signifie le mot évidence. Et surtout, je veux vous faire vivre tout le chemin qu'il faut parcourir avant d'en arriver à l'illumination d'Archimède, l'effet Eurêka.

Premier acte : la description des faits

Imaginons un tournoi de tennis (ça marche aussi avec un tournoi de foot mais c'est moins bobo). Même si vous ne vous intéressez pas au tennis, vous entendez parler de la finale. Lors de la finale deux joueurs s'affrontent. En général, un joueur brillant et lunatique comme John McEnroe ou Yannick Noah contre un joueur solide et ennuyeux dont on oublie le nom même si c'est lui qui gagne le plus souvent. C'est la magie du sport. Une finale, deux joueurs.

Les demi-finales, c'est plus compliqué. Déjà, il y en a deux, car chaque demi-finale sert à décider de l'un des deux finalistes. Et du coup, il y a quatre joueurs en demi-finale, dont les noms servent à piéger les candidats qui croient tout savoir dans divers jeux télévisés. Bref, deux demi-finales, quatre joueurs.

Logiquement, il y a quatre quart-de-finale et huit joueurs. Il y a huit huitième-de-finale, seize seizièmes, etc.

On obtient ainsi deux suites de nombre remarquables :

phase	fin	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32
nombre de matchs	1	2	4	8	16	32
nombre de joueurs	2	4	8	16	32	64

À chaque fois, le nombre de joueurs est le double du nombre de matchs mais aussi le nombre de matchs de l'étape précédente. Ces nombres remarquables, ce sont les puissances de deux et on les note ainsi

$$2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad 2^4 = 16, \quad 2^5 = 32, \quad 2^6 = 64$$

Cette notation est pratique et permet de compter le nombre de phases d'un tournoi. Par exemple, un tournoi de 64 joueurs commence par les $32^{\text{ème}}$ de finale et comporte 6 phases dont la dernière est la finale. Remarquons que déjà, dans cette description, il y a une manipulation, on a commencé la description du tournoi par la finale, c'est-à-dire par la fin. Le mathématicien est attiré comme un aimant par ce qui est simple. Ici, dans notre tournoi, la fin avec son unique finale est plus simple que le début avec ses 32 matchs. C'est donc là où il faut porter le regard en premier.

Les adeptes du système métrique (plus des trois quarts de l'humanité) utilise les puissances de 10, pratiques pour manipuler des grands nombres comme en physique.

$$10^1 = 10, \quad 10^2 = 100, \quad 10^3 = 1\ 000, \quad 10^4 = 10\ 000$$

La vitesse de la lumière serait d'environ 10^9 km/h. Ce nombre est tellement grand qu'il est inimaginable en tant que tel. Il est bien plus simple de la concevoir comme la neuvième puissance de 10.

La bataille des origines

Certains se souviennent du passage à l'an 2000. Les autres en ont entendus parler. Ni la fin du monde prédit par Nostradamus, ni celle du calendrier aztèque, ni le fameux bogue de l'an 2000 n'ont eu lieu. Par contre, la bataille des origines, elle a bien eu lieu et le zéro a (presque) gagné. Le premier janvier de l'an 2000, toute la planète, ou presque, a fêté le passage dans le vingt et unième siècle et par la même dans le troisième millénaire.

Pourtant, quelques grincheux dans leur coin, quelques schtroumpfs à lunette, hurlaient à qui voulait les entendre (c'est-à-dire à peu près personne à part d'autres grincheux comme eux), que le XXI^{e} siècle commençait en 2001 et pas en 2000. Les romains, ces nullos, ne connaissant pas le zéro, ayant commencé la première année du calendrier chrétien par l'an 1, auraient condamné l'humanité à commencer chaque siècle par l'an 1, à savoir 1801, 1901, 2001.

En fait, cela fait plusieurs siècles (un ou deux) qu'on s'est rendu compte qu'il était plus judicieux de commencer par le nombre zéro que par le nombre un. Prenez un langage informatique comme python par exemple. On peut lui demander la liste des 5 premiers nombres par la commande simple suivante :

```
question : print(list(range(5)))
réponse : [0, 1, 2, 3, 4]
```

Bref, tout le monde a fait la fête au nez et à la barbe des grincheux. Ainsi, le nombre zéro a gagné le privilège d'être le premier des nombres, le nombre un n'étant plus que le deuxième. Enfin presque, pour bien faire, il faudrait aussi décaler les siècles (on serait au XX^{e} siècle et pas au XXI^{e} siècle, et au second millénaire et pas au troisième si on comptait un siècle zéro et un millénaire zéro. Bon, si l'humanité survit encore mille ans, la prochaine fois on aura tout bon.)

Revenons aux puissances de deux. Commencer à zéro est trop pratique ! Voyez plutôt :

$$2^0 = 1, \quad 2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8, \quad 2^4 = 16, \quad 2^5 = 32$$

Ainsi, le nombre de matchs de la finale n'est plus une exception mais fais partie de la liste des puissances. Un tout petit gain, croyez-vous ?

Un peu de comptabilité

Essayons maintenant de compter le nombre de matchs d'un tournoi de 64 joueurs. Pour cela, on additionne le nombre de matchs de chaque phase, en commençant par la finale, comme d'habitude. Cela donne :

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$$

J'imagine que beaucoup de lecteurs connaissent le truc.

$$\begin{array}{lcl}
1 & = & 1 \\
1+2 & = & 3 \\
1+2+4 & = & 7 \\
1+2+4+8 & = & 15 \\
1+2+4+8+16 & = & 31 \\
1+2+4+8+16+32 & = & 63
\end{array}$$

On tombe ainsi sur la suite de nombres remarquables $1, 3, 7, 15, 31, 63$. En effet, si on ajoute 1 à chacun de ces nombres, on retombe sur la suite précédente $2, 4, 8, 16, 32, 64$.

Tout ceci est bien connu. Mais pourquoi ? Si vous demandez autour de vous, quelques personnes vous parleront d'une recette magique, appelée récurrence, à la fois mystérieuse et puissante, qui permet de venir à bout de ce genre de résultat. Mais si vous les cuisinez un peu, ils vont vite avouer qu'ils n'ont jamais compris comment cela marche. En fait la récurrence fait partie du code de procédure mathématiques. C'est une démarche formelle qui n'éclaire et qui ne permet que de vérifier et pas d'expliquer. C'est juste un bel emballage mais si on n'a pas de chocolat, je veux dire de preuve, à mettre dedans, parfaitement inutile. Il faut d'abord avoir une preuve et après seulement, et c'est en général inutile, on peut songer à une démarche plus formelle.

Voilà la méthode que je propose, que j'appelle "proton y neutron" car c'est une réaction en chaîne comme celle de la bombe atomique. Considérons notre somme et ajoutons 1, on obtient :

$$\begin{array}{cl}
 & 1 + (1+2+4+8+16) \\
= & (1+1) + (2+4+8+16) \\
= & 2 + (2+4+8+16) \\
= & (2+2) + (4+8+16) \\
= & 4 + (4+8+16) \\
= & (4+4) + 8 + 16 \\
= & 8 + 8 + 16 \\
= & 16 + 16 \\
= & 32
\end{array}$$

S'il est clair dans votre tête que le calcul peut continuer ainsi indéfiniment, vous avez compris la magie de la récurrence.

Tournoi à la japonaise

Dans un tournoi de go, le champion en titre, c'est une question d'honneur, refusera de participer au tournoi de peur d'affronter des joueurs indignes de lui et ne daignera affronter que le gagnant du tournoi en priant que celui-ci ne perde que de justesse. On rassemble les seize joueurs pour un mini-tournoi qui commence par les huitièmes de finale. Le gagnant de la finale affronte alors le champion en titres.

On peut considérer qu'il y a 17 joueurs en tout en comptant le champion. Le nombre total de matchs est de 15 pour le tournoi plus un pour l'affrontement final, soit au total 16 matchs.

Absentéisme

Tous les ans, le club de tennis de Sainte-Foix-Les-Gonesses organise un tournoi permettant au seize meilleurs juniors du club de s'affronter. Tournoi mixte mais à l'ancienne, les garçons en tee-shirt croco et les filles en jupette et soquettes blanches. Le matin du match, Émilie l'astucieuse, mélange discrètement un puissant laxatif dans le bol de céréales de sa sœur jumelle. Celle-ci décide de passer la journée aux toilettes. Ils ne restent que quinze participants au tournoi.

Le règlement stipule que s'il y a un absent, son adversaire gagne par forfait. Il y a donc uniquement sept matchs au premier tour du tournoi pour huit qualifiés. Ensuite, tout est normal.

Au total, il y a donc $7 + 4 + 2 + 1 = 14$ matchs pour 15 joueurs

Mister Camping

Tous les ans, sur la plage du camping de la jonquille rouge, on organise un tournoi de tennis sur sable. C'est rigolo et quand on tombe, on ne se fait pas mal. En 2017, il y a dix participants. Et les organisateurs se demandent bien comment ils vont faire.

Monsieur Duboni, comptable de son état explique que $10 = 8 + 2$. Huit joueurs s'affrontent en trois tours. Les deux derniers s'affrontent et ensuite les deux gagnants font la finale. Au total, il y aura $7 + 1 + 1 = 9$ matchs.

Madame Polamul fait remarquer que c'est plutôt injuste, deux des joueurs étant trop avantagés. Elle propose alors de faire comme si c'était un tournoi avec 16 joueurs avec 5 des joueurs étant forfait. Certes, cinq joueurs seront avantagés mais juste un peu. Au total, il y aura autant de match ; en effet, un tournoi de seize joueurs comporterait 15 matchs mais si on enlève les cinq forfaits, il reste 10 matchs.

Deux méthodes complètement différentes et non équivalentes donnent finalement le même nombre de matchs, cela est intrigant.

Bilan provisoire

Essayons de faire un tableau pour mettre en relation le nombre de joueurs avec le nombre de matchs au vu des exemples étudiés

nombre de joueurs	2	4	8	10	15	16	17	32
nombres de matchs	1	3	7	9	14	15	16	31

Un schéma se dessine, quelle que soit la configuration, il y a un match de moins que de joueurs. Mais comment en avoir la preuve ? Il y a tellement de façon différentes d'organiser un tournoi.

Le problème de Cendrillon

Pendant que ses sœurs sont parties faire la fête, Cendrillon doit compter des lentilles. Sa marâtre lui a ordonné de compter le nombre de lentilles d'un gros tas de lentilles. Et si elle se trompe, elle sera sévèrement punie. Mais voilà que notre Cendrillon, condamné à rester dans sa pièce sombre, s'évade en esprit et décide de vagabonder un peu dans le monde merveilleux des idées. Et elle se pose des questions. Des questions bizarres et incongrues. Comment dois-je compter mes lentilles ? Il faut pour cela que j'en choisisse une première et que je la mette de côté. Mais les lentilles ne sont pas toutes pareilles, il y en a des grosses et des petites, des brunes et des blondes. Il y a même des cailloux, pense-t-elle en souriant. Si je commence par une petite, vais-je trouver le même nombre que si je commence par une grande ? Comment en être sûr ? Combien y a-t-il de façon différente de les compter ? J'ai tant de choix pour la première et encore tant de choix pour la seconde. Il y a peut-être des millions de choix, peut-être même bien plus. Pourquoi mes choix n'ont-ils aucune influence sur le compte final ? Cela me parait clair mais en même temps, je ne voie rien qui m'en assure se dit-elle en rêvant

La nature humaine n'a pas besoin de compter quand elle voie deux objets, ou trois, ou quatre, ou même cinq objets quelles que soient leurs positions. On sait, un point, c'est tout. À partir de six objets, ce n'est pas toujours clair. S'il y a une symétrie, ça l'est sinon, il y a un peu de flou. Avec un tas de onze pièces, il n'y a pas d'autres moyens que de les compter pour savoir. Que signifie compter ?

On utilise une correspondance entre les nombre et les pièces. On prend la première pièce et on la nomme Un, la deuxième et on la nomme Deux. De sorte qu'à la fin, chaque pièce correspond à un nombre et chaque nombre, jusqu'à onze correspond à une pièce. Le concept de correspondance est l'objet le plus utilisé en mathématiques, dans toutes ses branches, partout et toujours. Ici, on parle de correspondance bijective (comprenez qu'elle est parfaite). Notez bien que cela ne répond pas à la question de Cendrillon. Je n'y répondrais pas ici. Pour donner une idée de la difficulté de la question, je préciserai juste que j'en donne parfois la preuve à mes élèves les années où je juge que suffisamment d'entre eux peuvent la comprendre.

Une correspondance parfaite

Revenons à notre tournoi de tennis. Lors de chaque match, il y a un perdant et un gagnant. Chaque perdant est éliminé et ne perd donc qu'une fois. Il y a donc autant de match que de perdants. Hors, mis à part le gagnant du tournoi, tout joueur est un perdant. Le nombre de perdants (c'est-à-dire le nombre de matchs) est donc égal au nombre de joueurs moins un.

Souvent, au lycée, des professeurs, sous la pression de parents soucieux de rendement immédiat, réduisent leur enseignement à ce dernier paragraphe. Avouez que si j'avais commencé par la, vous n'auriez rien compris à mon histoire !