Espaces résolubles

Hubert Quatreville

6 novembre 2011

Résumé

Un espace espace topologique est qualifié de résoluble [1 Bourbaki] lorsqu'il possède une partie dense d'intérieur vide, ou, ce qui revient au même, lorsqu'il peut s'écrire comme réunion disjointe de deux parties denses. Le but de cet article, dont beaucoup de démonstrations sont inspirées de [1 Bourbaki] est de donner des conditions suffisantes pour qu'un espace topologique soit résoluble. Un contre-exemple important, celui des espaces ultraréguliers, lui encore tiré de [1 Bourbaki] sera donné.

1 Espaces résolubles

Définition 1 *Soit E un espace topologique. On dira que E est résoluble si E possède deux parties denses disjointes. Lorsque E est un espace topologique et F une partie de E, on dira que F est une partie résoluble de E lorsque F, muni de la topologie induite est résoluble.*

Exemple 1 Tout ensemble possédant au moins deux éléments muni de la topologie grossière est résoluble.

Exemple 2 La droite numérique réelle munie de sa topologie usuelle est résoluble. Les rationnels et les irrationnels sont deux parties denses.

Exemple 3 Soit E un ensemble infini et $\mathcal{F}$ un ultrafiltre non principal de E. En prenant comme ouverts, les éléments de $\mathcal{F}$ ainsi que l'ensemble vide, on obtient un espace topologique non séparé, accessible, connexe, sans point isolé, pour lequel les parties denses sont exactement les ouverts non vide. cet espace n'est pas résoluble.

On remarquera que cette topologie est très fine, toute partie étant ouverte ou fermée.

Proposition 1 *Soit E un espace topologique. E est résoluble ssi E possède une partie dense d'intérieur vide.*

Démonstration :

Supposons que E soit résoluble. Il existe alors deux parties denses disjointes A et B. l'intérieur de A est inclus dans l'intérieur du complémentaire de B donc est vide. Réciproquement, si E possède une partie dense A d'intérieur vide, alors A est son complémentaire sont denses et disjoints. CQFD

Proposition 2 *Soit E un espace topologique résoluble. Alors E ne possède pas de point isolé.*

Démonstration :

Si E possède un point isolé a, l'intérieur de toute partie dense de E contient a. CQFD

Proposition 3 *Soit E un ensemble, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux topologie sur E. On suppose que $\mathcal{T}'$ est plus fine que $\mathcal{T}$, c'est à dire que $\mathcal{T} \subset T'$. Alors si $(E, \mathcal{T}')$ est résoluble, il en est de même de $(E, \mathcal{T})$.*

Démonstration :

Soit A une partie de E dense pour $\mathcal{T}'$, E est alors le seul fermé pour $\mathcal{T}'$ contenant A, c'est donc a fortiori le seul fermé pour $\mathcal{T}$ contenant A. A est donc dense aussi pour $\mathcal{T}$. CQFD

En gros, les topologies peu fines sont résolubles alors que les topologies très fines ne le seront pas. Un argument brutal de cardinalité permet d'obtenir une condition suffisante pour qu'un espace soit résoluble, c'est l'objet du prochain paragraphe

Proposition 4 *Soit E un espace topologique et A une partie résoluble de E, alors $\bar{A}$ est résoluble.*

Sans commentaire.

Proposition 5 *Tout ouvert d'un espace résoluble est résoluble.*

Pas mieux

Proposition 6 *Soit E un espace topologique. Soit U et V deux ouverts résolubles de E, alors $U \cup V$ est un ouvert résoluble de E. De plus, si (A, B) est un couple de parties denses disjointes de U, il existe un couple de parties denses disjointes (A', B') de $U \cup V$ tel que $A \subset A'$ et $B \subset B'$.*

Démonstration :

Notons A et B deux partie denses disjointes de U ; C et D deux parties denses disjointes de V. $A \cup (C \setminus B)$ et $(D \setminus A) \cup B$ sont deux parties denses disjointes de $U \cup V$. CQFD

Théorème 1 *Soit E un espace topologique. La réunion de tous les ouverts résolubles de E est un ouvert résoluble de E.*

Démonstration :

Notons Ω l'ensemble des triplets (U, A, B) où U est un ouvert de E, A et B deux parties disjointes de U et denses dans U. On peut munir Ω de la relation d'ordre $(U_1, A_1, B_1) \leqslant (U_2, A_2, B_2)$ ssi $U1 \subset U_2$, $A_1 \subset A_2$ et $B_1 \subset B_2$. Muni de cet ordre, Ω est inductif. En utilisant le lemme de Zorn, on peut trouver un triplet maximal (U, A, B). La proposition précédente prouve que U contient tous les ouverts résolubles de U. cqfd

Définition 2 *Soit E un espace topologique. On dira que E est hermétique ssi aucun ouvert de E n'est résoluble.*

Corollaire 1.1 *Soit E un espace topologique. Il existe un ouvert hermétique H de E dont le complémentaire est résoluble. De plus un tel ouvert est unique. On dira que H est la composante hermétique de E.*

Démonstration :

Il suffit de prendre le complémentaire de l'adhérence de la réunion de tous les ouverts résolubles de E. Pour l'unicité, constatons que l'intérieur du complémentaire d'un tel ouvert est nécessairement un ouvert résoluble maximal. cqfd

Ce dernier résultat est connu sur les sites anglophones sous le nom de décomposition de Hewitt.

2 Exemples d'espaces hermétiques

Exemple 4 Soit E un ensemble. L'ensemble des topologies séparées sans point isolés sur E est inductif. Une topologie séparée sans point isolé maximale est appelée quasi-maximale [1 Bourbaki]. Pour une telle topologie, toute partie dense est ouverte.

Exemple 5 Soit E un ensemble. L'ensemble des topologies régulières sans point isolé est inductif. Une topologie régulière sans point isolée maximale est dite ultra-régulière [1 Bourbaki]. Pour une telle topologie, toute partie dense contient un ouvert dense.

3 Espaces topologiques tempérés

Définition 3 *Soit E un espace topologique. On dira que E est tempéré lorsque sa topologie possède une base $\mathcal{B}$ telle que $\operatorname{Card} \mathcal{B} \leqslant \operatorname{Card} E$. On dira que E est fortement tempéré lorsque tout ouvert de E est tempéré. On dira que E est isodyne lorsque tous les ouverts non vide de E ont le même cardinal.*

Cette définition est intéressante car on va démontrer que tout espace fortement tempéré sans point isolé est résoluble et que la plupart des espaces topologiques usuels sont fortement tempérés. Les espaces isodynes n'ont pas un intérêt extraordinaire, c'est juste une idée piquée dans [1 Bourbaki] servant d'intermédiaire technique pour parvenir à nos fins.

Exemple 6 La droite numérique réelle est isodyne et fortement tempérée. Il en est de même de la droite des nombres rationnels.

Exemple 7 Tout espace métrique infini sans point isolé est fortement tempéré. En effet, dans un espace métrique tout point possède une base dénombrable de voisinages ouverts que sont les boules ouvertes de rayon $\frac{1}{n}$. La réunion de ceux-ci pour tous les points de l'espace forment une base de sa topologie. De plus, tout ouvert d'un espace métrique sans point isolé est infini.

Exemple 8 Plus généralement, tout espace séparé infini sans point isolé dans lequel chaque point possède une base dénombrable de voisinages est fortement tempéré.

Exemple 9 Tout espace possédant au moins deux éléments et un point isolé n'est pas isodyne.

Exemple 10 $(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \cup [1,2]$ n'est pas isodyne pour la topologie usuelle. On peut dans $\mathbb{R}^2$ prolonger cet espace pour le rendre connexe.

Commençons par un théorème classique, auquel on ajoute une condition supplémentaire.

Lemme 1 *Soit E un ensemble infini. Il existe un bon ordre $\leqslant$ sur E tel que pour tout élément x dans E, on a $\operatorname{Card}\{t \in E \mid t \leqslant x\} < \operatorname{Card} E$.*

Démonstration :

Considérant, l'ensemble Ω des couples $(A, \leqslant)$ où A est une partie de E, $\leqslant$ un bon ordre sur A tel que pour tout x dans A, on a $\operatorname{Card}\{t \in E \mid t \leqslant x\} < \operatorname{Card} E$. On peut munir Ω d'une relation d'ordre de la façon suivante : $(A, \leqslant_A)$ est moins avancée que $(B, \leqslant_B)$ ssi $A \subset B$, tout élément de B qui n'est pas dans A majore A pour $\leqslant_B$ et $\leqslant_A$ est l'ordre induit par $\leqslant_B$ sur A. Pour cette relation d'ordre Ω est inductif et possède donc un élément maximal (A,$\leqslant$) d'après le lemme de Zorn. On a nécessairement $A = E$ car sinon, on prolongerait l'ordre à $A \cup \{\omega\}$ en considérant ω comme le plus grand élément de la nouvelle structure. Notez bien, que E étant infini, la condition de cardinalité n'est pas perturbé par l'ajout d'un élément. CQFD

C'est un résultat classique de la théorie des ordinaux, le bon ordre ainsi obtenu est l'ordinal minimal correspondant au cardinal de E.

Théorème 2 *Soit E un espace isodyne tempéré sans point isolé. Alors E est résoluble.*

Démonstration :

Le cas où E est fini est rapide. Un espace isodyne fini est muni de la topologie grossière. S'il ne possède pas de point isolé, il est soit vide, soit de cardinal au moins égal à deux et dans les deux cas, il est résoluble. On peut donc considérer dans la suite que E est infini.

Notons $\mathcal{B}$ une base de la topologie de E telle que $\operatorname{Card}\mathcal{B} \leqslant \operatorname{Card} E$. On peut munir $\mathcal{B}$ d'un bon ordre $\leqslant$ tel que, pour tout U dans $\mathcal{B}$,
$\operatorname{Card}\{V \in \mathcal{B} \mid V \leqslant U\} < \operatorname{Card} E$.

On peut alors construire par récurrence transfinie deux applications $a : \mathcal{B} \to E$ et $b : \mathcal{B} \to E$ d'images respectives disjointes A et B vérifiant :

$$\forall U \in \mathcal{B}, a(U) \in U \text{ et } b(U) \in V$$

En effet, soit U dans $\mathcal{B}$. Supposons que a et b soient définies sur $\{V \in \mathcal{B} \mid V < U\}$ d'images disjointes. U est infini de même cardinal que E (E isodyne) et l'ensemble des valeurs prises par a et b est de cardinal strictement plus petit. On peut donc trouver deux nouvelles valeurs $a(U)$ et $b(U)$ distinctes des précédentes, ce qui achève la récurrence (on obtient même l'injectivité de a et b mais ce n'est pas utile).

Par construction, les images de a et b rencontrent tous les ouverts d'une base de la topologie de E donc ce sont des parties denses et disjointes de E. CQFD

Lemme 2 *Soit E un espace topologique. Tout ouvert de E contient un ouvert isodyne.*

Démonstration :

Soit U un ouvert de E. Parmi les ouverts inclus dans U, un ouvert de cardinal minimal est isodyne. CQFD

Attention toutefois, les ouverts isodynes ne forment pas une base de la topologie de E comme on le voit sur l'exemple $(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \cup [1,2]$.

Théorème 3 *Soit E un espace topologique dans lequel tout ouvert isodyne est résoluble, alors E est résoluble.*

Démonstration :

Notons H la composante hermétique de E. H est nécessairement vide, sinon il contiendrait un ouvert isodyne donc résoluble. CQFD

Théorème 4 *Tout espace topologique fortement tempéré sans point isolé est résoluble.*

Démonstration :

Dans un espace fortement tempéré, tout ouvert isodyne est tempéré donc résoluble. CQFD

Corollaire 4.1 *Tout espace métrique sans point isolé est résoluble.*

Tout espace métrique sans point isolé est fortement tempéré.

Théorème 5 *Tout espace compact sans point isolé est fortement tempéré.*

Démonstration :

Soit K un espace topologique compact. Soit U un ouvert non vide de K. K est séparé donc pour tout couple (x, y) d'éléments distincts de U, il existe un ouvert $U_{x,y}$ inclus dans U contenant x et dont l'adhérence ne contient pas y. L'ensemble des intersections finies des ouverts $U_{x,y}$ forment une base de la topologie de U.

En effet, soit V un ouvert non vide inclus dans U et x dans V. Notons F le fermé (de K) complémentaire de U et pour chaque y de $F_y = F \cap \bar{U_{x,y}}$. Par construction, l'intersection des F_y est vide. On peut donc en extraire une intersection vide finie $F_{y_1} \cap \ldots F_{y_n}$. Ce qui entraine que l'intersection des $U_{x,y_1} \cap \ldots U_{x,y_n}$ est incluse dans V.

Notons maintenant que dans un compact sans point isolé tout ouvert non vide est nécessairement infini. Donc le cadinal de $U \times U$ est le même que celui de U et que le cardinal de l'ensemble des parties finies de U est le même que celui de U.
CQFD

Corollaire 5.1 *Tout espace topologique localement compact sans point isolé est fortement tempéré (donc résoluble).*

Démonstration :

Un espace localement compact est ouvert dans son compactifié d'Alexandov (et aussi dans son compactifié de Stone-Cech). CQFD

4 Fermés et frontières

Dans un espace topologique E, la frontière d'une partie est toujours un ensemble fermé. Pour que E lui-même soit frontière, il est nécessaire et suffisant que E soit résoluble. A quelle condition tout fermé de E est-il frontière d'un ensemble ?

Théorème 6 *Soit E un espace topologique résoluble. Alors tout fermé de E est la frontière d'une partie de E*

Démonstration :

Soit F une partie fermée de E. Notons A une partie dense d'intérieur vide dans E et posons $B = (A \cap F) \cup (E \setminus F)$. B est dense dans E et $\mathring{B} = E \setminus F$ donc la frontière de B est F. CQFD

Corollaire 6.1 *Soit E un espace topologique métrisable ou localement compact. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

— *E est sans point isolé*

— *E est résoluble*
— *Tout fermé de E est la frontière d'une partie de E.*

Références

[1 Bourbaki] Bourbaki *Topologie générale, chapitres 1 à 4,* Hermann 1974.

[2 Bourbaki] Bourbaki *Topologie générale, chapitres 5 à 10,* Hermann 1974.

[3 Hatcher] Hatcher Allen *Algebraic topology,* Cambridge University Press 2002. http ://www.math.cornell.edu/ hatcher/

[4 Steen] Steen L.A. & Seebach J.A *Counterexamples in Topology,* Dover 1978.

[5 Morris] Morris S.A *Topology without tears,* Internet publication, lien instable

[6 Hocking] Hocking & Young *Topology,* Topology 1988.

[5 Charatonik] Charatonik, Krupski & Pyrih *Examples in Continuum theory,* http ://adela.karlin.mff.cuni.cz/ pyrih/e/index.htm